

第1讲 圆基础与垂径定理（练习）

一、圆的基本概念

练习

1. 填空 .

- (1) 圆上各点到圆心的距离都等于 _____ , 到圆心距离等于半径的点都在 _____ .
- (2) 到点 P 的距离等于 2cm 的点的集合是 _____ .
- (3) 在 $\odot O$ 中 AB 为弦, $\angle AOB = 90^\circ$, 点 O 到 AB 的距离为 5 , 则 $\odot O$ 的半径为 _____ .

【答案】 (1) 圆的半径 ; 圆上

(2) 以 P 为圆心, 以 2cm 为半径的圆

(3) $5\sqrt{2}$

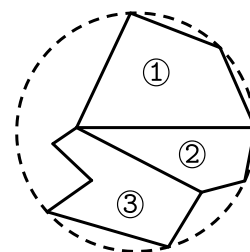
【解析】 (1) 圆的半径 ; 圆上 .

(2) 以 P 为圆心, 以 2cm 为半径的圆 .

(3) $5\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】圆的定义

2. 小明家的圆形玻璃打碎了, 其中三块碎片如图所示, 为了配到与原来大小一样的圆形玻璃, 小明应带到商店去的一块碎片是 () .



A. ①

B. ②

C. ③

D. 均不可能

【答案】 A

【解析】 第①块有三个点在圆形玻璃的边上, 可在这三点中任意连接出两条弦, 作出这两条弦的垂直平分线, 两条垂直平分线的交点就是圆心, 进而可得到半径的长 .

故选A .

【标注】【知识点】圆的定义

练习

3. 已知 AB 是半径为5的圆的一条弦，则 AB 的长不可能是（ ） .

- A. 4 B. 8 C. 10 D. 12

【答案】D

【解析】 $\because$ 圆内最长的弦为直径，
 $\therefore$ 此圆内最长的弦长为10，
 $\therefore AB$ 的长不可能是12 .

【标注】【知识点】弦与直径

4. 下列说法错误的是（ ） .

- A. 直径是圆中最长的弦 B. 长度相等的两条弧是等弧
C. 面积相等的两个圆是等圆 D. 半径相等的两个半圆是等弧

【答案】B

【解析】A、直径是圆中最长的弦，所以A选项的说法正确；
B、在同圆或等圆中，长度相等的两条弧是等弧，所以B选项的说法错误；
C、面积相等的两个圆的半径相等，则它们是等圆，所以C选项的说法正确；
D、半径相等的两个半圆是等弧，所以D选项的说法正确 .
故选B .

【标注】【知识点】圆的定义

5. 下列命题中，正确的个数是（ ） .

①半圆是弧；②弧是半圆；③直径是弦；④弧长相等的弧是等弧；⑤直径的两个端点分圆所成的两条弧，每一条弧都是半圆 .

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】C

【解析】①半圆是弧，正确；

②弧是半圆，错误；

③直径是弦，正确；

④弧长相等的弧是等弧，错误；

⑤直径的两个端点分圆所成的两条弧，每一条弧都是半圆，正确．

正确的有三个．

故选C．

【标注】【知识点】区分真假命题

6. 下列说法正确的是 _____（填序号）．

①半径不等的圆叫做同心圆；

②优弧一定大于劣弧；

③不同的圆中不可能有相等的弦；

④直径是同一个圆中最长的弦．

【答案】④

【解析】①同心圆要求圆心位置相同，错误

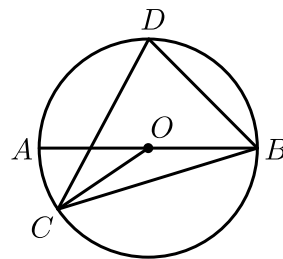
②同圆或等圆中优弧大于劣弧，错误

③不同圆中可能有相等的弦，错误

④同一圆中直径是最长的先，正确

【标注】【知识点】圆的定义

7. 如图，在 $\odot O$ 中，弦的条数是（ ）．



A. 2

B. 3

C. 4

D. 以上均不正确

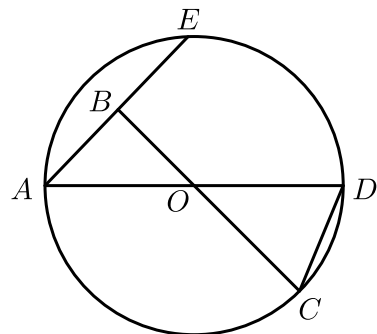
【答案】C

【解析】如图，在 $\odot O$ 中，有弦AB、弦DB、弦CB、弦CD，共有4条弦．

故选C .

【标注】【知识点】弦与直径

8. 如图，在 $\odot O$ 中，点 B 、 O 、 C 和点 A 、 O 、 D 分别在同一条直线上，则图中有（ ）条弦 .



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】 B

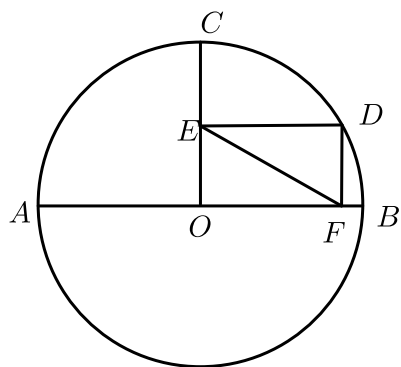
【解析】 图中的弦有 AE 、 AD 、 CD 这3条 .

故选：B .

【标注】【知识点】圆的定义

练习

9. 如图， $\odot O$ 的半径 $OC \perp AB$ ， D 为 $\widehat{BC}$ 上一点， $DE \perp OC$ ， $DF \perp AB$ ，垂足分别为 E 、 F ， $EF = 3$ ，直径 $AB =$ _____ .



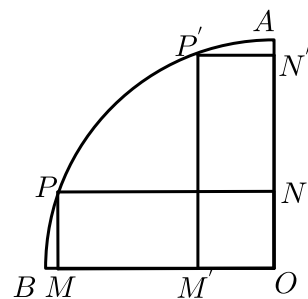
【答案】 6

【解析】 $\because OC \perp AB$ ， $DE \perp OC$ ， $DF \perp AB$ ，

$\therefore$ 四边形 $OFDE$ 是矩形 ,
 $\therefore OD = EF = 3$,
 $\therefore AB = 6$.

【标注】【知识点】弦与直径

10. 如图，在 90° 的扇形 AOB 中有矩形 $PMON$ ， P 为弧 AB 上的动点，点 M 、 N 分别在半径 OB 、 OA 上，当 P 点运动到 P' 时， M 、 N 也随之移动到 M' 、 N' ，若保持四边形 $P'M'O'N'$ 是矩形，试判断 MN 与 $M'N'$ 的大小，并说明理由。



【答案】 $MN = M'N'$.

【解析】 $\because MN = OP$,
 $M'N' = OP'$,
 $OP = OP'$,
 $\therefore MN = M'N'$.

【标注】【知识点】圆的定义

二、垂径定理

练习

11. 下列说法正确的是（ ）。

- A. 平分弦的直线平分弦所对的弧
- B. 平分弦的直径垂直于弦
- C. 弦的垂直平分线过圆心
- D. 圆的对称轴是圆的直径

【答案】 C

【解析】 平分弦（非直径）的直径垂直于弦，所以⑥为假命题；

弦的垂直平分线经过圆心，所以⑦为真命题；
圆对称轴是直径所在的直线，所以⑧为假命题．

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

12. 下列说法正确的是（ ）．

- A. 在同一平面内，三点确定一个圆
- B. 等圆是能够完全重合的圆
- C. 旋转会改变图形的形状和大小
- D. 平分弦的直径垂直于弦

【答案】 B

【解析】 A 选项：在同一平面内，不在同一直线上的三点确定一个圆，所以本选项说法错误，不符合题意；

B 选项：等圆是能够完全重合的圆，本选项说法正确，符合题意；

C 选项：旋转不会改变图形的形状和大小，所以本选项说法错误，不符合题意；

D 选项：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，所以本选项说法错误，不符合题意．

故选 B．

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

13. 下列命题中，正确的是（ ）．

- A. 平分一条直径的弦必垂直于这条直径
- B. 平分一条弧的直线垂直于这条弧所对的弦
- C. 弦的垂线必经过这条弦所在圆的圆心
- D. 在一个圆内平分一条弧和它所对的弦的直线必经过这个圆的圆心

【答案】 D

【解析】 弦应是非直径的弦，A 错；

过弧的中点的直线有无数条，B 错；

只有在同圆中，圆心角所对的弧相等，C 错；

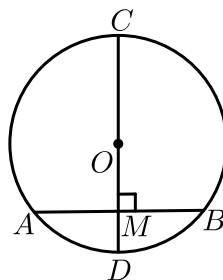
故选 D.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】垂径定理以及应用

练习

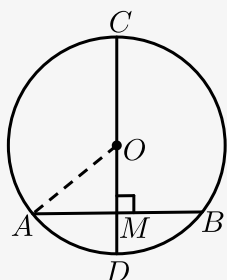
14. 如图，在 $\odot O$ 中， CD 是直径， AB 是弦， $AB \perp CD$ 于 M ， $AB = 8$ ， $OC = 5$ ，则 MD 的长为（ ）。



- A. 4 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 1

【答案】B

【解析】连接 OA ，



$\because CD$ 是直径， AB 是弦， $AB \perp CD$ 于 M ， $AB = 8$ ，

$\therefore AM = BM = 4$ 。

$\because OC = 5$ ，

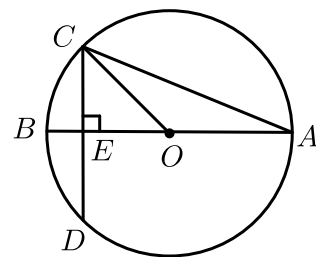
$\therefore OA = OD = 5$ 。

$\therefore OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ 。

$\therefore DM = OD - OM = 5 - 3 = 2$ 。

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

15. 如图， $\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD ，垂足为点 E ， $\angle A = 22.5^\circ$ ， $OC = 4$ ，则 CD 的长为（ ）。



- A. $4\sqrt{2}$ B. 4 C. 8 D. $2\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】 $\because \angle A = 22.5^\circ$,

$$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 45^\circ,$$

$\because \odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD ,

$\therefore CE = DE$, $\triangle OCE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore CE = \frac{\sqrt{2}}{2} OC = 2\sqrt{2},$$

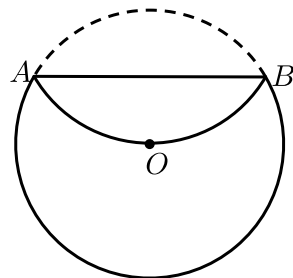
$$\therefore CD = 2CE = 4\sqrt{2}.$$

故选：A.

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】垂径定理以及应用

16. 如图，将 $\odot O$ 沿着弦 AB 翻折，劣弧恰好经过圆心 O ，若 $\odot O$ 的半径为 6，则弦 AB 的长度等于 _____.



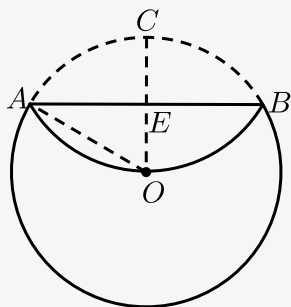
【答案】 $6\sqrt{3}$

【解析】过点 O 作 $OC \perp AB$ 于 E 交 $\odot O$ 于点 C ，连结 OA ，

依题可知， $OE = CE = \frac{1}{2} OA = 3$ ，

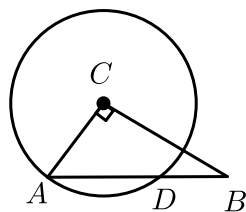
$\because OC \perp AB$ ，

$$\therefore AE = BE = 3\sqrt{3}, AB = 6\sqrt{3}.$$



【标注】【知识点】垂径定理以及应用

17. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，以点 C 为圆心， CA 为半径的圆与 AB 交于点 D ，则 AD 的长为（ ）.



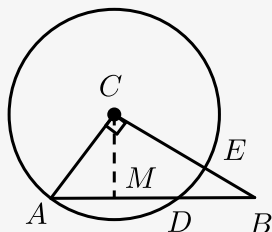
- A. $\frac{9}{5}$ B. $\frac{21}{5}$ C. $\frac{18}{5}$ D. $\frac{5}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

过 C 作 $CM \perp AB$ ，交 AB 于点 M ，如图所示，



$\because CM \perp AB$ ，

$\therefore M$ 为 AD 的中点，

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CM, \text{ 且 } AC = 3, BC = 4, AB = 5,$$

$$\therefore CM = \frac{12}{5},$$

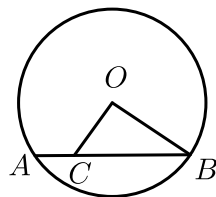
在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中，根据勾股定理得： $AC^2 = AM^2 + CM^2$ ，即 $9 = AM^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$ ，

$$\text{解得：} AM = \frac{9}{5},$$

$$\therefore AD = 2AM = \frac{18}{5}.$$

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

18. 如图， $\odot O$ 的半径为2，弦 $AB = 2\sqrt{3}$ ，点 C 在弦 AB 上， $AC = \frac{1}{4}AB$ ，则 OC 的长为（ ）.

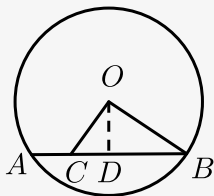


A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

【答案】 D**【解析】** 如图, 过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D ,则 $AD = BD$.

$$\therefore AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AD = BD = \sqrt{3}, AC = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

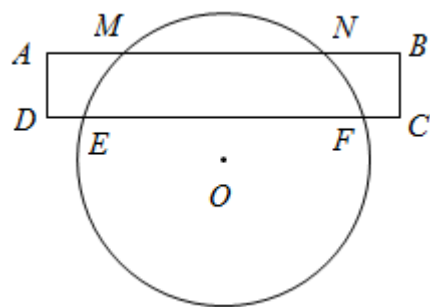
又 $\because \odot O$ 的半径为 2, 即 $OB = 2$,

$$\therefore OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = 1.$$

$$\therefore OC = \sqrt{CD^2 + OD^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

19. 如图所示, 矩形 $ABCD$ 与 $\odot O$ 相交于点 M 、 N 、 E 、 F , 若 $AM = 2$, $DE = 1$, $EF = 8$, 则 MN 的长为 ().



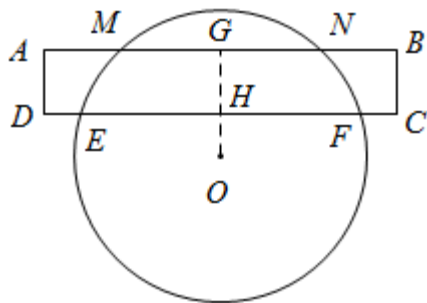
A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

【答案】 C**【解析】** 过点 O 作 $OG \perp AB$ 于 G , 交 EF 于 H .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ$.

$\because OG \perp AB$, $\therefore \angle AGO = 90^\circ$, $\therefore$ 四边形 $ADHG$ 是矩形,

$\therefore OH \perp CD$, $AG = DH$, $\therefore HE = \frac{1}{2}EF = 4$.

$\because DE = 1$, $\therefore DH = AG = 5$.

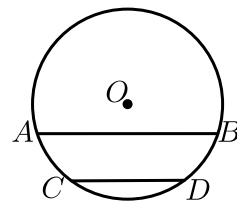
$\because AM = 2$, $\therefore MG = AG - AM = 5 - 2 = 3$.

$\because OG \perp AB$, $\therefore MN = 2MG = 6$.

答案: 6

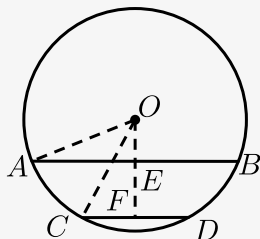
【标注】【知识点】垂径定理以及应用

20. 如图, $\odot O$ 的半径为 10cm, 弦 $AB \parallel CD$, $AB = 16\text{cm}$, $CD = 12\text{cm}$, 圆心 O 位于 AB , CD 的上方, 求 AB 和 CD 间的距离.



【答案】2cm.

【解析】如图, 过点 O 作弦 AB 的垂线, 垂足为 E , 延长 OE 交 CD 于点 F , 连接 AO , CO .



$\because AB \parallel CD$, $OE \perp AB$,

$\therefore OF \perp CD$,

$\therefore EF \perp AB$, $EF \perp CD$,

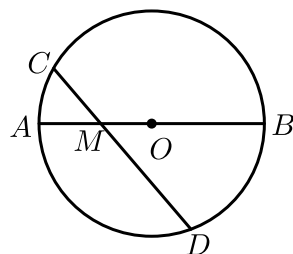
$\therefore EF$ 为 AB 和 CD 之间的距离,

$\because OE \perp AB, OF \perp CD, AB = 16\text{cm}, CD = 12\text{cm},$
 $\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 8\text{cm}, CF = \frac{1}{2}CD = 6\text{cm},$
 $\because \text{在 Rt}\triangle AOE \text{ 中}, AO = 10\text{cm}, AE = 8\text{cm},$
 $\therefore OE = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\text{cm},$
 $\because \text{在 Rt}\triangle COF \text{ 中}, CO = 10\text{cm}, CF = 6\text{cm},$
 $\therefore OF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\text{cm},$
 $\therefore EF = OF - OE = 8 - 6 = 2\text{cm},$
 $\therefore AB \text{ 和 } CD \text{ 之间的距离为 } 2\text{cm}.$

【标注】【能力】运算能力

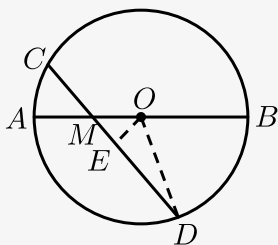
【知识点】垂径定理以及应用

21. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $AB = 4$, 点 M 是 OA 的中点, 过点 M 的直线与 $\odot O$ 交于 C, D 两点. 若 $\angle CMA = 45^\circ$, 则弦 CD 的长为 _____.



【答案】 $\sqrt{14}$

【解析】连接 OD , 作 $OE \perp CD$ 于 E , 如图所示:



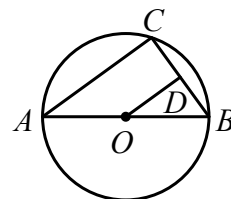
则 $CE = DE$,
 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $AB = 4$, 点 M 是 OA 的中点,
 $\therefore OD = OA = 2, OM = 1,$
 $\because \angle OME = \angle CMA = 45^\circ,$
 $\therefore \triangle OEM$ 是等腰直角三角形,
 $\therefore OE = \frac{\sqrt{2}}{2}OM = \frac{\sqrt{2}}{2},$

在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中，由勾股定理得： $DE = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ ，
 $\therefore CD = 2DE = \sqrt{14}$ 。

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

练习

22. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C 是 $\odot O$ 上一点， $OD \perp BC$ 于点 D ， $AC = 4$ ，则 OD 的长为（ ）。



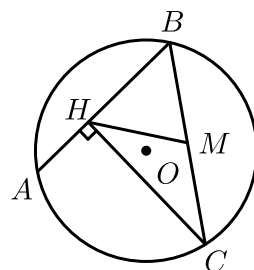
- A. 1 B. 1.5 C. 2 D. 2.5

【答案】C

【解析】 $\because OD \perp BC$ ，
 $\therefore CD = BD$ ，
 $\because OA = OB$ ， $AC = 4$ ，
 $\therefore OD = \frac{1}{2}AC = 2$ 。
 故选C。

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

23. 如图， AB 是 $\odot O$ 的弦，点 C 是优弧 AB 上的动点（ C 不与 A 、 B 重合）， $CH \perp AB$ ，垂足为 H ，点 M 是 BC 的中点。若 $\odot O$ 的半径是3，则 MH 长度的最大值是（ ）。



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】A

【解析】 $\because CH \perp AB$,

$$\therefore \angle BHC = 90^\circ,$$

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle BHC$ 中, 点 M 是 BC 的中点,

$$\therefore MH = \frac{1}{2}BC,$$

$\because BC$ 为 $\odot O$ 的弦,

$\therefore$ 当 BC 为直径时, MH 的长度取得最大值,

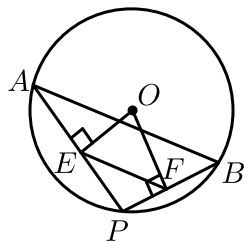
$\because \odot O$ 的半径是 3,

$\therefore MH$ 长度的最大值为 3.

故选: A.

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

24. 如图, 点 A 、 B 是 $\odot O$ 上两点, $AB = 10$, 点 P 是 $\odot O$ 上的动点 (P 与 A 、 B 不重合), 连结 AP 、 PB , 过点 O 分别作 $OE \perp AP$ 于点 E , $OF \perp PB$ 于点 F , 则 $EF = ()$.



A. 4

B. 5

C. 5.5

D. 6

【答案】B

【解析】 $\because OE \perp AP$ 于 E , $OF \perp PB$ 于 F ,

$$\therefore AE = PE, PF = BF,$$

$\therefore EF$ 是 $\triangle APB$ 的中位线,

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AB = 5$$

故选 B.

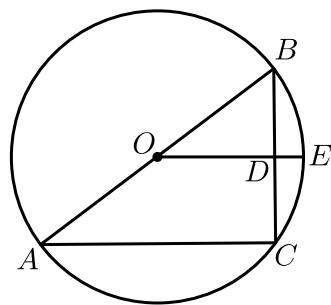
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】垂径定理以及应用

练习

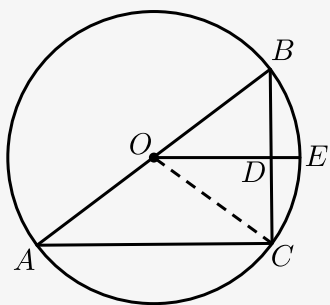
25.

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， BC 是弦，点 E 是 $\widehat{BC}$ 的中点， OE 交 BC 于点 D ．连接 AC ，若 $BC = 6$ ， $DE = 1$ ，则 AC 的长为 _____ ．



【答案】 8

【解析】 连接 OC ，如图所示．



$\because$ 点 E 是 $\widehat{BC}$ 的中点，

$\therefore \angle BOE = \angle COE$ ．

$\because OB = OC$ ，

$\therefore OD \perp BC$ ， $BD = DC$ ．

$\because BC = 6$ ，

$\therefore BD = 3$ ．

设 $\odot O$ 的半径为 r ，则 $OB = OE = r$ ．

$\because DE = 1$ ，

$\therefore OD = r - 1$ ．

$\because OD \perp BC$ 即 $\angle BDO = 90^\circ$ ，

$\therefore OB^2 = BD^2 + OD^2$ ．

$\because OB = r$ ， $OD = r - 1$ ， $BD = 3$ ，

$\therefore r^2 = 3^2 + (r - 1)^2$ ．

解得： $r = 5$ ．

$\therefore OD = 4$ ．

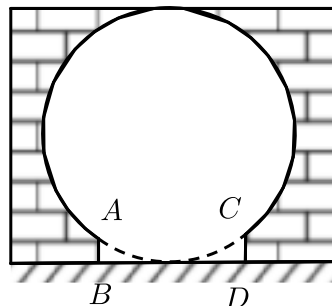
$\because AO = BO$ ， $BD = DC$ ，

$\therefore OD = \frac{1}{2}AC$ ．

$$\therefore AC = 8.$$

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

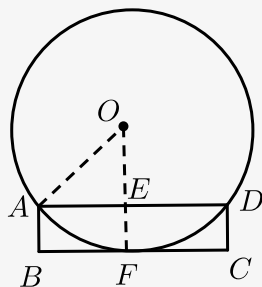
26. 图是“明清影视城”的一扇圆弧形门，小红到影视城游玩，他了解到这扇门的相关数据：这扇圆弧形门所在的圆与水平地面是相切的， $AB = CD = 0.25$ 米， $BD = 1.5$ 米，且 AB 、 CD 与水平地面都是垂直的．根据以上数据，请你帮小红计算出这扇圆弧形门的最高点离地面的距离是（ ）．



- A. 2米 B. 2.5米 C. 2.4米 D. 2.1米

【答案】B

【解析】如图，连接 OF ， OA ，交 AD 于点 E ，



$\because BC$ 是圆 O 的切线，

$\therefore OF \perp BC$ ．

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore EF = AB$ ，

设圆 O 的半径为 R ，

$$\therefore AE = \frac{BC}{2}.$$

$$OE = R - EF.$$

在 $\text{Rt}\triangle OEA$ 中，

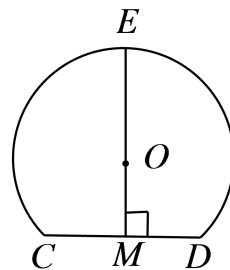
$$AE^2 + OE^2 = OA^2.$$

解得 $R = 1.25$ 米．

$$1.25 \times 2 = 2.5 \text{米}.$$

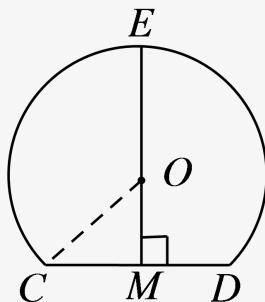
【标注】【知识点】垂径定理以及应用

27. 如图， EM 经过圆心 O ， $EM \perp CD$ 于 M ，若 $CD = 4$ ， $EM = 6$ ，则 $\widehat{CED}$ 所在圆的半径为 _____ .



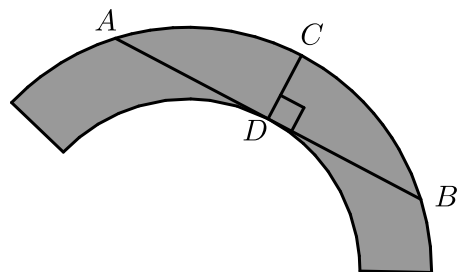
【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】连接 OC ，设 $\widehat{CED}$ 所在圆的半径为 R ，
 则 $OC = R$ ， $OM = 6 - R$ ，
 $\because EM$ 经过圆心 O ， $EM \perp CD$ 于 M ，
 $CD = 4$ ，
 $\therefore CM = DM = 2$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle OMC$ 中，由勾股定理得：
 $OC^2 = OM^2 + CM^2$ ，
 $R^2 = (6 - R)^2 + 2^2$ ， $R = \frac{10}{3}$.



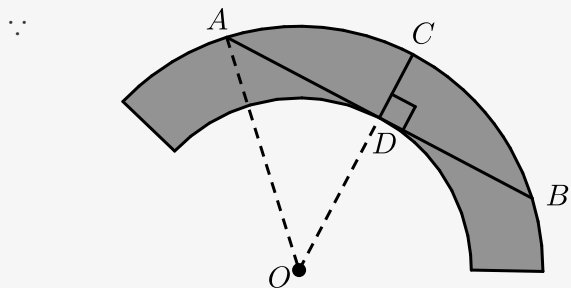
【标注】【知识点】垂径定理以及应用

28. 如图是一个古代车轮的碎片，小明为求其外圆半径，连接外圆上的两点 A 、 B ，并使 AB 与车轮内圆相切于点 D ，作 $CD \perp AB$ 交外圆于点 C ．测得 $CD = 10\text{cm}$ ， $AB = 60\text{cm}$ ，则这个车轮的外圆半径为 _____ cm .



【答案】 50

【解析】如图，设点 O 为外圆的圆心，连接 OA 和 OC ，



$$CD = 10\text{cm}, AB = 60\text{cm},$$

$\therefore$ 设半径为 r ，则 $OD = r - 10$ ，

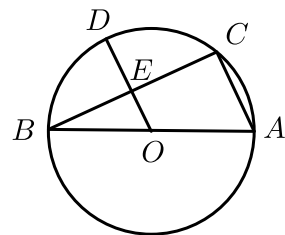
$$\text{根据题意得：} r^2 = (r - 10)^2 + 30^2,$$

解得： $r = 50$ 。

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【知识点】垂径定理的推论以及应用

29. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 是 $\odot O$ 上一点，连接 BC ， AC ， $OD \perp BC$ 于 E 。



(1) 求证： $OD \parallel AC$ 。

(2) 若 $BC = 8$ ， $DE = 3$ ，求 $\odot O$ 的直径。

【答案】(1) 证明见解析。

$$(2) \frac{25}{3}.$$

【解析】(1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 直径，

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\because OD \perp BC,$$

$$\therefore \angle OEB = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \parallel AC.$$

(2) 令 $\odot O$ 半径为 r ，

$$BE = CE = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\therefore r^2 = 4^2 + (r - 3)^2,$$

$$\therefore r = \frac{25}{6},$$

$$\therefore \odot O \text{ 直径为 } \frac{25}{3}.$$

【标注】【知识点】圆与勾股

练习

30. $\odot O$ 的半径为 5, AB 是直径, C 是圆上一点, $CD \perp AB$ 交圆 O 于 D , 且 $CD = 8$, 则 $AD =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{5}$ 或 $4\sqrt{5}$

【解析】 弦心距 $= \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,
 $AD = \sqrt{4^2 + (5 - 3)^2} = 2\sqrt{5}$,
 或 $AD = \sqrt{4^2 + (5 + 3)^2} = 4\sqrt{5}$.

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

31. AB 是 $\odot O$ 的弦, $OM \perp AB$, 垂足为 M , 连接 OA . 若 $\triangle AOM$ 中有一个角是 60° , $OM = \sqrt{3}$, 则弦 AB 的长为 _____.

【答案】 6 或 2

【解析】 $\because OM \perp AB$,
 $\therefore AM = BM$,
 当 $\angle AOM = 60^\circ$ 时, 如图 1, $AM = \sqrt{3}OM = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$,

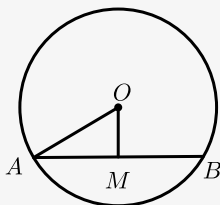


图1

$\therefore AB = 2AM = 6$,
 当 $\angle OAM = 60^\circ$ 时, 如图 2, $AM = \frac{\sqrt{3}}{3}OM = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 1$,

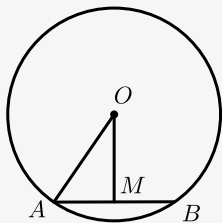


图2

$$\therefore AB = 2AM = 2,$$

综上所述， AB 的长为6或2.

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

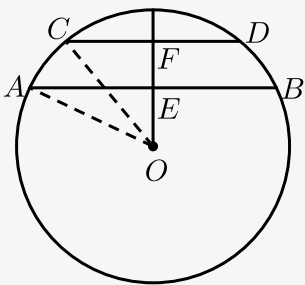
练习

32. 已知 $\odot O$ 的半径为13，弦 $AB = 24$ ，弦 $CD = 10$ ， $AB \parallel CD$ ，求这两条平行弦 AB ， CD 之间的距离.

【答案】 7或17.

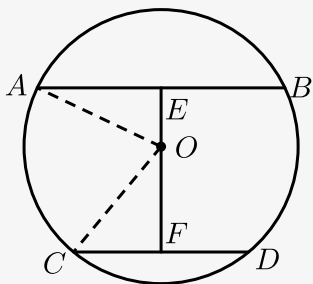
【解析】 如图， $AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 24 = 12$ ，
 $CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ ，
 $OE = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ ，
 $OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ ，

①当两弦在圆心同侧时，



$$\text{距离} = OF - OE = 12 - 5 = 7;$$

②当两弦在圆心异侧时，



$$\text{距离} = OE + OF = 12 + 5 = 17 .$$

所以距离为7或17 .

故答案为：7或17 .

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

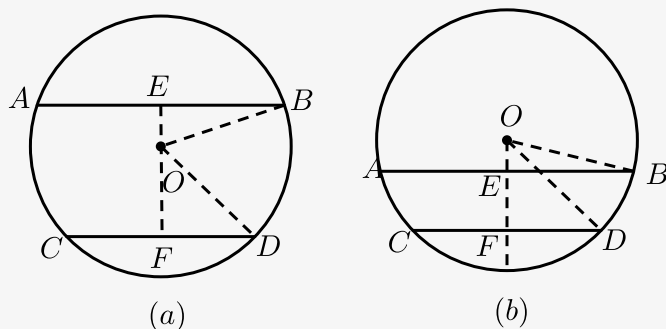
【知识点】垂径定理的推论以及应用

【知识点】勾股数

33. 半径为5的 $\odot O$ 中，弦 AB 为8，弦 CD 为6，且 $AB \parallel CD$ ，请作图并求 AB 与 CD 的距离 .

【答案】画图见解析，7或1 .

【解析】



圆内平行弦有两种位置关系，

(a)(b)两图运用垂径定理可分别求，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore$ 作 $OE \perp AB$ ， $OF \perp CD$ ，连 OB 、 OD ，

$\therefore \text{Rt}\triangle OBE$ ， $\text{Rt}\triangle ODF$ ， $BE = 4$ ， $DF = 3$ ，

$\therefore OE = 3$ ， $OF = 4$ ，

$\therefore EF = 7$ 或 $EF = 1$ ，

故得(a)图距离为7，(b)图距离为1 .

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【能力】推理论证能力

34. 已知 AB ， CD 是 $\odot O$ 的两条平行弦， $\odot O$ 的半径为10cm， $AB = 12\text{cm}$ ， $CD = 16\text{cm}$ ，求 AB 、 CD 间的距离 .

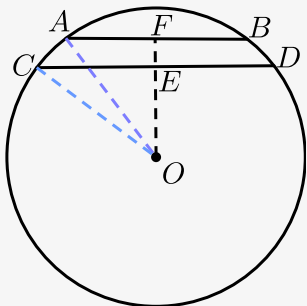
【答案】2cm或14cm .

【解析】过圆心 O 作 $OF \perp AB$ ，垂足为点 F ，

OF 或其反向延长线交 CD 于点 E , 连接 OA 、 OC .

$\because AB \parallel CD, OE \perp CD$.

(1) 当 AB 、 CD 在圆心 O 的同侧时, 如图所示 .



由垂径定理, 得 $AF = \frac{1}{2}AB = 6\text{cm}$, $CE = \frac{1}{2}CD = 8\text{cm}$.

在 $\text{Rt}\triangle AFO$ 中,

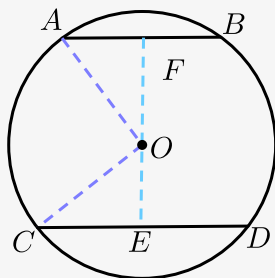
$$OF = \sqrt{OA^2 - AF^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(\text{cm}) .$$

在 $\text{Rt}\triangle CEO$ 中,

$$OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6(\text{cm}) .$$

$$\therefore EF = OF - OE = 8 - 6 = 2(\text{cm}) .$$

(2) 当 AB 、 CD 在圆心 O 的异侧时, 如图所示 .



同(1)得 $OF = 8\text{cm}$, $OE = 6\text{cm}$.

$$\therefore EF = OF + OE = 8 + 6 = 14(\text{cm}) .$$

$\therefore AB$ 、 CD 间的距离为 2cm 或 14cm .

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【思想】分类讨论思想

35. $\odot O$ 的半径是13, 弦 $AB \parallel CD$, $AB = 24$, $CD = 10$, 则 AB 与 CD 的距离是() .

A. 7

B. 17

C. 7或17

D. 34

【答案】 C

【解析】 如图,

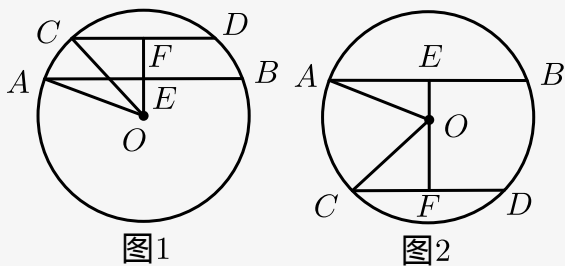


图1

图2

$$AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 24 = 12,$$

$$CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 10 = 5,$$

$$OE = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$

①当两弦在圆心同侧时，距离 = $OF - OE = 12 - 5 = 7$ ；

②当两弦在圆心异侧时，距离 = $OE + OF = 5 + 12 = 17$ ，

所以AB与CD的距离为7或17．

故选：C．

练习

36. $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，且 $AB = AC$ ，点O到BC的距离为3，圆的半径为5，则AB的长是_____．

【答案】 $2\sqrt{5}$ 或 $4\sqrt{5}$

【解析】 分两种情况考虑：

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，如图1所示，

过A作 $AD \perp BC$ ，由题意得到AD过圆心O，连接OB，

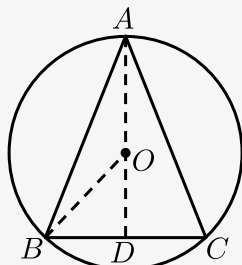


图1

$$\because OD = 3, OB = 5,$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle OBD\text{中，根据勾股定理得：} BD = 4,$$

$$\text{在Rt}\triangle ABD\text{中，} AD = AO + OD = 8, BD = 4,$$

$$\text{根据勾股定理得：} AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 4\sqrt{5};$$

当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，如图2所示，

过A作 $AD \perp BC$ ，由题意得到AD延长线过圆心O，连接OB，

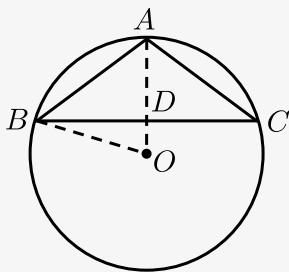


图2

$\because OD = 3, OB = 5,$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中，根据勾股定理得： $BD = 4,$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AD = AO - OD = 2, BD = 4,$

根据勾股定理得： $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 2\sqrt{5},$

综上， $AB = 2\sqrt{5}$ 或 $4\sqrt{5}.$

故答案为： $2\sqrt{5}$ 或 $4\sqrt{5}.$

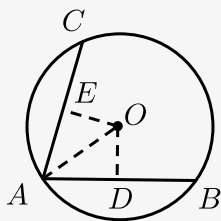
【标注】【知识点】垂径定理以及应用

练习

37. $\odot O$ 的半径是2，它的两条弦AB、AC的长分别 $2\sqrt{2}, 2\sqrt{3},$ 则 $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 15° 或 75°

【解析】 作 $OD \perp AB$ 于D， $OE \perp AC$ 于E，如图，



$\because AB = 2\sqrt{2}, AC = 2\sqrt{3},$

$\therefore AD = BD = \sqrt{2}, AE = CE = \sqrt{3},$

在 $\text{Rt}\triangle OAD$ 中，

$\because \cos \angle OAD = \frac{AD}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$\therefore \angle OAD = 45^\circ;$

在 $\text{Rt}\triangle OAE$ 中，

$\because \cos \angle AOE = \frac{AE}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\therefore \angle OAE = 30^\circ,$$

当圆心 O 在 $\angle BAC$ 内部, 则 $\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$,

当圆心 O 在 $\angle BAC$ 外部, 则 $\angle BAC = \angle OAB - \angle OAC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

故答案为 15° 或 75° .

【标注】【知识点】 30° 特殊角的性质应用

【知识点】垂径定理以及应用

【知识点】圆周角定理以及应用

【思想】分类讨论思想

【思想】数形结合思想

【能力】推理论证能力

38. 在半径为1的 $\odot O$ 中, 弦 AB 、 AC 的长分别为 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}$, 则 $\angle BAC$ 的度数为().

A. 15° 或 75°

B. 25° 或 75°

C. 15° 或 70°

D. 12° 或 75°

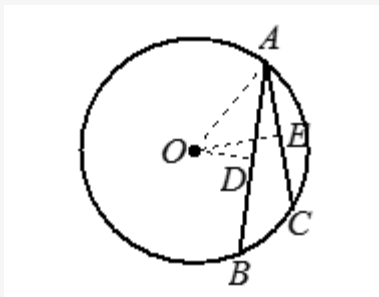
【答案】 A

【解析】 此题分两种情况讨论:

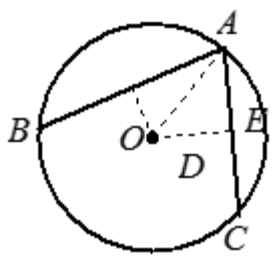
① 若 AB 、 AC 在圆心 O 的同侧, 如图 连结 OA , 过 O 点分别作 $OD \perp AB$, $OE \perp AC$, 垂足分别为 D 、 E ,

$$\text{则 } AD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad AE = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \therefore \angle OAD = 30^\circ, \quad \angle OAE = 45^\circ, \quad \therefore$$

$$\angle BAC = \angle DAE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$



② 若 $ABAC$ 在圆心 O 的异侧, 如图 根据圆的对称性, $\angle BAC = 75^\circ$ 综上所述, $\angle BAC$ 的度数为 15° 或 75° .



【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【思想】分类讨论思想

39. 已知点 A 、 B 、 C 是直径为 6cm 的 $\odot O$ 上的点，且 $AB = 3\text{cm}$ ， $AC = 3\sqrt{2}\text{cm}$ ，则 $\angle BAC$ 的度数为 _____ .

【答案】 105° 或 15°

【解析】如图1，

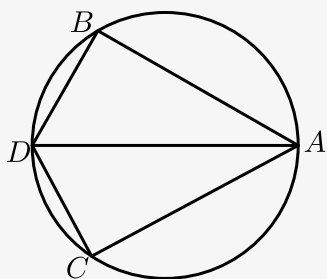


图 1

$\because AD$ 为直径，

$\therefore \angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AD = 6$ ， $AB = 3$ ，

则 $\angle BDA = 30^\circ$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $AD = 6$ ， $AC = 3\sqrt{2}$ ， $\angle CAD = 45^\circ$ ，

则 $\angle BAC = 105^\circ$ ；

如图2，

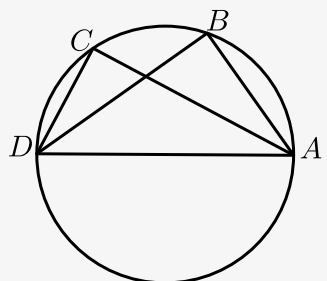


图 2

$\because AD$ 为直径,

$$\therefore \angle ABD = \angle ABC = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AD = 6$, $AB = 3$,

$$\text{则} \angle BDA = 30^\circ, \angle BAD = 60^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AD = 6$, $AB = 3\sqrt{2}$, $\angle CAD = 45^\circ$,

$$\text{则} \angle BAC = 15^\circ.$$

综上, 105° 或 15° .

【标注】【知识点】圆与勾股